LE PRINCIPE DES TIROIRS DE DIRICHLET (1805-1859)

Principe. Si une commode à 5 tiroirs contient 6 paires de chaussettes, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.

Démonstration. (Par *l'absurde.*) C'est presque évident, car si chaque tiroir contenait au plus une paire de chaussettes alors la somme des paires de chaussettes des tiroirs serait inférieure ou égale à 5, alors qu'il y a 6 paires rangées dans la commode. □

Plus généralement, si j'ai 17 paires de chaussettes rangées dans une commode à 5 tiroirs alors il y a au moins un tiroir contentant au moins 4 pairs de chaussettes, puisque $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

La formulation "abstraite" donnée par le mathématicien est :

Principe de Dirichlet. Si j'ai $n + 1$ paires de chaussettes et n tiroirs, alors il y au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes. Plus généralement, si $n = q \cdot m + r$ où n m, q (le quotient) et r (le reste) sont des nombres naturels et $r > 0$ et que j'ai n paires de chaussettes et que ma commode a m tiroirs alors il y a forcément un tiroir qui en contient au moins $q + 1$ paires. [1]

Aussi élémentaire que cela puisse paraître, ce principe permet de résoudre bon nombre de problèmes d'arithmétique d'une manière élémentaire et subtile.

Problèmes

Exercice 1. Un sac contient des billes : 5 bleues, 7 vertes et 8 rouges. Quel est le nombre minimal de billes qu'il faut tirer du sac à l'aveugle pour obtenir au moins deux billes de même couleur ? Même question, pour obtenir trois couleurs distinctes ?

Exercice 2. Un million de sapins poussent dans une forêt en Sibérie. Il semblerait qu'aucun d'eux ne puisse être recouvert par plus de 31999 aiguilles. Combien, au minimum y a-t-il de sapins ayant exactement le même nombre d'aiguilles ?

Exercice 3. Étant donnés 12 entiers naturels, montre qu'il en existe au moins une paire dont la différence est divisible par 11.

Exercice 4. Démontre que dans un groupe de 5 personnes il y a au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis (dans ce groupe). On admettra que la relation "être ami" est symétrique.

Exercice 5. Si l'on choisit 11 entiers parmi les nombres naturels de 1 à 20, y a-t-il alors toujours au moins au minimum deux dont l'un divise l'autre ?

Exercice 6. ⋆⋆ Démontre qu'il existe une puissance de 3 dont l'écriture décimale se termine par 001.

Exercice 7. ⋆⋆⋆ Démontre qu'il existe au moins deux puissances de 2 dont leur différence est divisible par 2018.

Références

[1] D. Fomin, S. Genkin, I. Itenberg *Mathematical Circles (Russian Experience)*, Amer. Math. Society.

Collège Calvin, Geneva, Switzerland 1211
E-mail address: `christian.aebi@edu.ge.ch`

1. Dans la littérature mathématique anglaise ce principe porte le nom de *pigeonhole principle*.