# LE RÊVE DE SINUS

**Rappel.** Généralement quand on intègre par parties une expression comme $\int x^k \sin(x)dx$, où $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f'(x) = sin(x)$ et $g(x) = x^k$, dans le but de faire "baisser" l'exposant $k$ d'une unité. Ainsi, après $k$ étapes on a "gagné". Dans ce qui suit, nous allons faire exactement le contraire dans le but de faire apparaître un résultat des plus surprenants !

$$sin(x) = sin(t)\ |_0^x = \int_0^x cos(t)dt = \int_0^x (+1)\cdot cos(t)dt$$

Par parties, posons : $g(t) := cos(t)$ et $f'(t) := +1$, en choisissant $f(t) = -(x-t)$ ( ! ! !) D'où,

$$\sin(x) = -(x-t)\cos(t)\ |_0^x - \int_0^x (x-t)\sin(t)dt = x + \int_0^x -(x-t)\sin(t)dt$$

Similairement, posons $g(t) := \sin(t)$ et $f'(t) := -(x-t)$ et donc $f(t) = \frac{1}{2}(x-t)^2$. D'où

$$\sin(x) = x + \frac{1}{2}(x-t)^2\sin(t)\ |_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2\cos(t)dt = x - \int_0^x \frac{1}{2}(x-t)^2\cos(t)dt$$

À nouveau, posons $g(t) := \cos(t)$ et $f'(t) := -\frac{1}{2}(x-t)^2$ et donc $f(t) = \frac{1}{3!}(x-t)^3$. D'où

$$\sin(x) = x + \frac{1}{3!}(x-t)^3\cos(t)\ |_0^x - \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3\sin(t)dt = x - \frac{1}{3!}x^3 + \int_0^x \frac{1}{3!}(x-t)^3\sin(t)dt$$

Au bout de $n = 2m+1$ itérations de cette procédure on voit apparaître la formule

$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \ldots + (-1)^{m+1}\int_0^x \frac{1}{n!}(x-t)^n\sin(t)dt$$

que l'on peut aisément démontrer par récurrence. Il est à remarquer que le reste intégral peut être rendu arbitrairement petit puisque "la fonction factorielle écrase la fonction puissance" (cf. résultat de 3e année).

## Autres développements de fonctions sous forme de séries

**Développement de $f(x) = \log(x+1)$ autour de l'origine.**
Partons de la série géométrique : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$.
D'où $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x}$ et on en déduit :

$$\begin{aligned}\log(1+x) = \log(1+t)\ |_0^x &= \int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \int_0^t 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^{n-1} + \frac{(-t)^n}{1+t}dt \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \pm \ldots + \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.\end{aligned}$$

Si $x = -\frac{1}{2}$ alors on voit que le reste intégrale tend rapidement vers 0, lorsque $n \to \infty$.

**Développement à l'aide du théorème de Taylor-MacLaurin de $f(x) = \sqrt{1+x}$.**
Comme $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$ alors on en déduit :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{2n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}, \quad \text{où } (2n-1)!! := (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\ldots 5\cdot 3\cdot 1.$$

D'où, comme $f(x) = f(0) + xf'(x) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}x^n + \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ alors

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \mp \ldots + (-1)^{2n-1}\frac{(2n-1)!!}{2^n n!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (-1)^{2n+1}\frac{(2n+1)!!}{2^{n+1}}(1+t)^{-\frac{2n+1}{2}}(x-t)^n dt.$$

Cette série converge si le reste intégrale tend vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Collège Calvin, Genève, Suisse
*E-mail address*: christian.aebi@edu.ge.ch