LIMITES ET CONTINUITÉ

Une première approche à la notion de *continuité* est géneralement basée sur notre intuition du mouvement : *une fonction est dite continue en a (sur l'axe des abscisses) si l'on déplace x "continûment" autour de a alors les images, $f(x)$ se déplacent "continûment" autour de $f(a)$*. Or, une telle définition pour le mathématicien est stérile, car elle ne permet pas démontrer des résultats d'une manière formelle (et solide).

Définition 1 (formelle)**.** On dira qu'une fonction f est *continue* en a si
1) elle est définie en a (c'est-à-dire que $f(a) \in \mathbb{R}$)
2) que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe
3) et enfin, cette limite doit être égale à $f(a)$.
Ces conditions se résument à : f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Définition 2. On dira qu'une fonction f définie sur tout un intervalle ouvert I est *continue sur I* si f est continue pour tout $x \in I$.

Théorème 1 (opérations avec des fonctions continues)**.** *Toutes les propriétés relatives aux limites du théorème précédent s'adaptent à la continuité : En résumé, on a si f et g sont continues en a alors $f+g$, $f \cdot g$ et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a. De plus si g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. Il suffit d'exploiter les résultats (non démontrés) sur les limites du chapitre précédent.

□

Exemples de fonctions réelles continues et discontinues :

$f_1 : x \to \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad f_2 : x \to \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ $\quad f_3 : x \to \begin{cases} 5x-7 & \text{si } x < 2 \\ -x+5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Théorème 2 (de base sur la continuité)**.** *1) Si f est continue en a et que $f(a) \neq 0$ alors il existe un voisinage U_a de a tel que $f(x) \neq 0$, $\forall x \in U_a$.*
2) Si f est continue sur $[a; b]$, $f(a) < m$ et $f(b) > m$ alors il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = m$ [Bolzano (1817)]
Et son corollaire : si f est continue sur un intervalle $I = [a; b]$ alors f prend toutes les valeurs entre son minimum et son maximum.
3) Si une fonction f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Démonstration. (1) Par définition de la continuité en a alors si $f(a) = b \neq 0$ alors il existe un voisinage V_b de b ne contenant pas 0 et un voisinage U_a de a tels que $f(U_a) \subset V_b$, et donc aucun $x \in U_a$ n'annule la fonction f.
(2) Considérons la fonction $g(x) := f(x) - m$. On a que g est continue (car c'est la différence de deux fonctions continues), de plus $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$. Définissons l'ensemble $U = \{x \in I; g(x) < 0\}$. Cet ensemble est borné (car $b \notin U$), donc du fait que $\mathbb{R}$ soit *complet* alors U admet un supremum (maximum) x_0. Par le point (1), $g(x_0) = 0$ (sinon il y aurait un voisinage de x_0 pour qui cette propriété serait aussi vérifiée, et donc x_0 ne serait pas le supremum. Contradiction !) Pour ce x_0 on a alors $f(x_0) = m$.
(3) Démontrons que $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = 0$.

$$\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

□

C. Aebi, Collège Calvin, Genève, Suisse