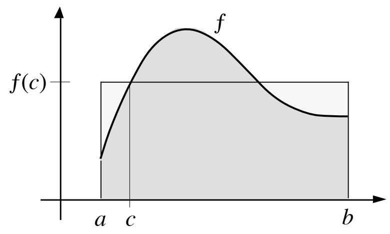
Théorèmes fondamentaux de l'intégrale

Le théorème de la moyenne *ou* Thm 0.
Si f est *continue* sur $[\,a\,;b\,]$, alors $\exists\, c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $\int_a^b f(x)\,dx = (\,b-a\,)\,f(c)$



<u>dém.</u> Par le thm. de la valeur intermédiaire (TVI), comme f est continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, elle atteint un minimum m et un maximum M sur cet intervalle, ainsi d'ailleurs que toutes les valeurs comprises entre m et M. Par la propriété P3 de l'intégrale on a alors

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \quad \Leftrightarrow \quad m \le \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx \le M\,.$$

De nouveau par TVI, comme f prend toutes les valeurs entre m et M, il existe un $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ (qui est appelée la *valeur moyenne* de f sur $[\,a\,;b\,]$). CQFD

Définition (rappel) Une fonction dérivable F est une *primitive de* f si $F'(x) = f(x)$.

Théorème I. Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ alors la fonction définie par $\boldsymbol{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$.

<u>dém.</u> Vérifions que le taux de variation de $\boldsymbol{F}$ entre x et $x+\Delta x$ existe lorsque $\Delta x \to 0$.

$$\frac{\boldsymbol{F}(x+\Delta x)-\boldsymbol{F}(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \underset{P2}{\overset{P1}{=}} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \overset{Thm0}{=} \frac{\Delta x}{\Delta x}\cdot f(c) \text{ avec } c \in [x; x+\Delta x]\,.$$

Comme f est continue alors si $\Delta x \to 0$ alors $f(c) \to f(x)$. CQFD

Rappel. Le *théorème de Lagrange* (1797), appelé aussi *des accroissements finis* affirme que si f est une fonction dérivable sur $[a;b]$ alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f'(c) = (f(b)-f(a))/(b-a)$.
Son corollaire garantit que si $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont deux primitives de f alors $F_2(x) = F_1(x) + cnte$.

Théorème II. Si G est une primitive d'une f continue sur $[\,a\,;b\,]$ alors $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

<u>dém.</u> Par le Thm I et par le rappel, comme le $\boldsymbol{F}$ ci-dessus et G sont deux primitives de f on a $G(x) = \boldsymbol{F}(x)+c$, quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. En particulier :
si $x=a$, on obtient $G(a) = \boldsymbol{F}(a)+c$, et donc par P2, $G(a) = c$,
si $x=b$, on obtient $G(b) = \boldsymbol{F}(b)+c$, c'est-à-dire $\boldsymbol{F}(b) = G(b) - G(a)$,
autrement dit $\boldsymbol{F}(b) = \int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$. CQFD.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

1. Un réservoir se vide avec un débit $f(t) = 100 - t - \frac{t^2}{5}$.

(Par exemple, au temps $t = 10$ [sec], le débit est de 70 [litres/sec].)

a) Quel est le débit moyen entre $t = 0$ et $t = 20$?

b) Si le réservoir est plein au temps $t = 0$ et se vide en 20 secondes, combien contient-il quand il est plein ?

2. Calculez :

a) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2}\,dx$

c) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

d) $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^3}\,dx$

e) $\int_5^{11} \frac{x^2-4x+5}{(x-2)^2}\,dx$

f) $\int_0^3 (3-x)^3\,dx$

g) $\int_1^2 \frac{10x+1}{\sqrt{5x^2+x+3}}\,dx$

h) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin(x)\cos(x)\,dx$

i) $\int_0^2 y^3\sqrt{9+y^4}\,dy$

j) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} \cos^2(x)\,dx$

k) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2011}(x)\,dx$

l) $\int_{-3}^3 |x-1|\,dx$

3. Un véhicule se déplace à une vitesse $V(t) = 30t(t-3)^2$, t étant en heures et V(t) en km/h.

a) Pour quelles valeurs de t sa vitesse est-elle nulle ?

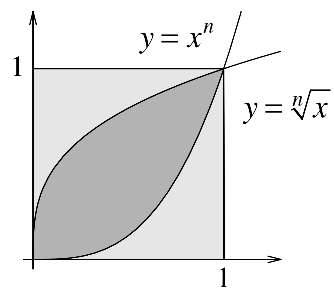
b) Entre ces instants, quelle distance a-t-il parcouru ?

c) Quelle a été sa vitesse maximale durant ce trajet ?

4. a) Calculez l'aire comprise entre les représentations graphiques de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \sqrt{x}$.

b) Existe-t-il un entier $n \geq 2$ pour lequel les deux domaines (clair et foncé) de la figure ont des aires égales ?

c*) Où se situe le centre de gravité du gris foncé ?



5. Déterminez les dérivées des fonctions $f: x \mapsto \int_2^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$ et $g: x \mapsto \int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx$.

6. a) Calculez l'aire du domaine limité par les courbes d'équations $y=(x-2)^2$ et $y = 4-x^2$.

b) Calculez l'aire du domaine limité par les courbes d'équations $y = x^2-4x$ et $y=-x^2$.

c) Calculez l'aire du domaine limité par les courbes d'équations $y = x^2 - 3x$ et $y = 5-x^2$.

7. a) Déterminez a, b et c de façon que $F: x \mapsto (ax^2+bx+c)\sqrt{3-2x}$ soit une primitive de $f: x \mapsto \sqrt{3-2x}$.

b) Calculez l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = x\sqrt{3-2x}$ et l'axe 0x.