ANALOGIES ENTRE LES LOIS DE PROBABILITES DISCRETES & CONTINUES

Soit une expérience aléatoire du type « sélectionner un citoyen helvétique quelconque *c(onfédéré)* né entre le 1 janv. et le 31 déc. 1995

1) Définissons la variable aléatoire
$X_1 : c \mapsto$ "nombre de nationalités que possède l'individu c"
Dans ce cas l'image est un entier naturel ≥ 1 et est donc *discret*

2) Cette variable aléatoire suit une certaine *distribution* (*loi de probabilité* ou *répartition*) par exemple (valeurs inventées)

$X_i = x_i$	1	2	3	4	5
p_i	$0,25$	$0,35$	$0,25$	$0,1$	$0,05$

Les seuls axiomes que la distribution doit vérifier sont

$$p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

3) À cette variable on associe une *espérance mathématique* :

$$E(X) \text{ ou } \mu_X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

qui représente une moyenne des x_i pondérée par les p_i ,
une variance :

$$V_X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2 p_i$$

qui représente la dispersion des x_i autour de μ_X , et un *écart type*

$$\sigma_X = \sqrt{V_X} .$$

1) Définissons la variable aléatoire $X_2 : c \mapsto$ "la taille de c"
Cette taille et un nombre réel . On s'intéressera alors à la probabilité que les images de X_2 *soient comprises dans un certain intervalle*, puisque que ça n'a pas de sens de s'intéresser à $P(X_2 = 1{,}570796... = \pi / 2) = 0$.

2) Il faut dans ce cas disposer d'une fonction qu'on appelle une *fonction de densité*, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui permet de mesurer la probabilité d'un événement. Les axiomes que f doit vérifier sont :

1) f intégrable 2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a alors $P(a \leq X_2 \leq b) = \int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ où F s'appelle *la fonction de répartition de f*, qui n'est autre qu'une primitive de f.

3) Comme dans le cas discret on a une *espérance mathématique*

$$E(X) \text{ ou } \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

qui représente une sorte de moyenne de X,

et *une variance*

$$V_X = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x)\, dx$$

qui représente la dispersion de f autour de μ_X , et un écart type

$$\sigma_X = \sqrt{V_X} .$$

Dans les deux cas, le théorème de König est valable : $V_X = \mu_{X^2} - \mu_X^2$

Quelques exemples classiques de fonctions de densité.

1) *Loi uniforme*. « Un autobus passe toutes les 15 min. à un certain arrêt. Quelle est la probabilité de devoir attendre le bus moins de x minutes.

Si x = 15 alors 100 %. Si x = 7 min 30 sec. alors 50 %. Plus généralement $P(X \leq t) = t \div 15$. D'où $F'(x) = f : x \mapsto \begin{cases} 1/15 & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) *Loi exponentielle*. Le taux de désintégration d'une matière radioactive est proportionnel à la quantité matière radioactive restante. En d'autres termes, si $N(t)$ représente le nombre d'atomes radioactifs au temps t alors $N'(t) = c \cdot N(t)$. On a vu au cours alors que $N(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$.
Supposons alors qu'au temps t = 0 le nombre d'atomes radioactifs soit N_0 et qu'après 10 ans il diminue de 20% (en d'autres termes on a $0{,}8N_0$).
Déterminons a et b : $N(0) = a \cdot e^0 = N_0$ d'où $a = N_0$. Par ailleurs $0{,}8N_0 = N(10) = N_0 \cdot e^{10 \cdot b}$, en divisant par N_0, puis en prenant *ln* on obtient $\ln(0{,}8^{1/10})$, d'où $N(t) = N_0 \cdot 0{,}8^{t \div 10}$. Le nombre d'atomes qui se sont désintégrés entre 0 et t égale $N_0 - N_0 \cdot 0{,}8^{t \div 10}$. En divisant cette quantité par N_0 on obtient la proportion d'atomes radioactifs qui se sont désintégrés : $p(t) = 1 - 0{,}8^{t \div 10}$. Cette quantité permet de définir la variable aléatoire X qui modélise la durée de vie d'un atome donné : $P(0 \leq X \leq t) = 1 - e^{t \div 10}$. Ainsi la fonction de répartition F est donnée par :

$F : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{t \div 10} & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et donc la fonction de densité f (qui n'est autre que $= F'$) est donnée par $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{-1}{10} e^{t \div 10} & \text{si } 0 \leq t \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$.

3) *Loi normale* $N(0;1)$. « Le taux de 'piles' obtenu en laçant une pièce de monnaie 10^9 fois » vérifie une loi de probabilité très très proche de la *loi normale centrée réduite* dont la fonction de densité est donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. On note la fonction de répartition de f par la lettre Φ.

Ainsi, la probabilité que ce taux soit $< t$ est obtenu en calculant : $P(X \leq t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, valeurs que l'on trouve dans les tables numériques

Si une variable aléatoire X suit une loi normale $N(\mu;\sigma)$ alors en effectuant un changement de variable $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$ on obtient une $N(0;1)$. En d'autres termes : $P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.