Axiomatique des probabilités de Kolmogorov (1933)

Définitions
On appelle *épreuve* ou *expérience aléatoire* $\mathcal{E}$ une expérience qui peut être répétée dans des conditions apparemment identiques et dont le résultat ne peut être prévu a priori : jet de dé; tirage de boule dans des urne avec (ou sans) remise; choix d'une direction dans le plan ; etc.

On appelle *issue (élémentaire)*, le résultat de l'expérience aléatoire et *univers*, l'ensemble des résultats possibles. On note cet ensemble univers par les lettres *U*, *E* ou Ω.

Remarques

1. L'univers Ω peut être *fini* comme dans l'expérience du *jet d'un dé* $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.

2. L'univers peut être *infini dénombrable* comme dans l'expérience suivante *jet d'une pièce de monnaie jusqu'à ce que pile apparaisse* : $E = \{P; FP; FFP; FFFP; ...\}$

3. Cet univers peut être *infini non dénombrable* comme dans l'expérience suivante *angle formé par une aiguille jetée sur un plancher formé de lames de même direction* : $U = [0;2\pi[$.

Définitions
On appelle *événement* tout sous-ensemble *A* de l'univers *U*. On note par $\wp(U)$, l'ensemble de tous les événements de *U* (qu'on appelle aussi l'ensemble de des *parties* de *U*) .

On dit d'un événement *A* s'est *réalisé* ou qu'il *a eu lieu*, si lors du déroulement de l'expérience aléatoire se présente une issue *e* appartenant à *A*.

On appelle *événement élémentaire* tout singleton de *U*.
On dit que *U* est un *événement certain*.
On dit que l'ensemble vide, $\varnothing$, est l'*événement impossible*.
Si *A* et *B* sont deux événements tels que $A \cap B = \varnothing$ on dit qu'ils sont *incompatibles*.
Soit *A* un événement de *U*, on note l'*événement contraire* de *A* par $\overline{A}$.

Algèbre des ensembles

Définitions
Un événement étant un sous-ensemble d'un ensemble appelé univers, on peut envisager de construire d'autres événements à partir d'événements, élémentaires par exemple, à l'aide des opérations sur les ensembles : l'*intersection* et la *réunion*, symbolisée par $\cap$ et $\cup$.
Ainsi l'événement $A \cap B$ se réalise lorsque les événements *A* et *B* se produisent tous les deux. L'événement $A \cup B$ se réalise lorsque l'événement *A* ou bien l'événement *B* (éventuellement les deux) se produit. On a vu plus haut que $\overline{A}$ définit l'événement contraire de *A*, cette notion permet de définir la différence de deux ensembles : $A - B = A \cap \overline{B}$.
On a de plus une relation d'ordre entre les sous-ensembles de l'univers *U*: l'*inclusion*. Ainsi si la réalisation de l'événement *A* entraîne systématiquement la réalisation de l'événement *B*, on dit que *A implique B*; ceci se note : $A \subset B$.

Propriétés des opérations sur les événements
Les opérations $\cap$ et $\cup$ sont associatives, commutatives et distributives l'une sur l'autre.
Les éléments neutres sont $\varnothing$ et *U* respectivement pour $\cup$ et $\cap$.
De plus on a $\forall A$ et $B \in \wp(U)$ on a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (lois de Morgan)

Fondement axiomatique de la théorie des probabilités
Soit U l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire. Une application P qui associe à chaque événement de U un nombre dans $\mathbb{R}$ est une *probabilité* si elle satisfait aux quatre axiomes suivants

Axiome 1. Pour tout événement A, $P(A) \geq 0$.

Axiome 2. $P(U) = 1$

Axiome 3. Si $A \cap B = \varnothing$ (c.-à-d. incompatibles) alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propriétés de la fonction *probabilité*

P₁ $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ *car* : $1 = P(U) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

P₂ $P(\varnothing) = 0$ *car* : $P(\varnothing) = P(\varnothing \cup \varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing)$

P₃ Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ *car* : $P(B) = P(A \cup (B - A)) = P(A) + P(B - A)$

P₄ A on a $0 \leq P(A) \leq 1$ *par* P_3 : $\varnothing \subset A \subset U$ *d'où* $0 = P(\varnothing) \leq P(A) \leq P(U) = 1$

P₅ $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$ *car* $P(A) = P(A \cap (B \cup \overline{B})) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

P₆ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ *par* P_3 : $P(A \cup B) = P\big((A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})\big)$

P₇ Si $U = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ n issues élémentaires *équiprobables* alors $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$.

P₈ Si A est formé de la réunion de k issues élémentaires équiprobables, alors $P(A) = \dfrac{k}{n}$.

Evénement indépendant et probabilité conditionnelle
Lorsque, en enchaînant deux expériences aléatoires, le déroulement de la seconde est lié à celui de la première, les probabilités de réalisation de la seconde seront donc liées à celle de la première. On parle alors de *probabilité conditionnelle* que l'on définit de la manière suivante.

Définition:
Soit A et B deux événements d'un univers probabilisé U. Si $P(A) \neq 0$, alors on appelle *probabilité conditionnelle* de B sachant A , le nombre

$$P(B / A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

Propriété
$P(B / A)$ est une probabilité.

Définition
Deux événements A et B sont *indépendants* si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Principe général
Lors d'une épreuve globale qui se décompose en n épreuves partielles successives la probabilité d'un événement final est égale au produit des probabilités des événements intermédiaires successifs.

Exemple. Pour $n = 2$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B / A) \\ &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$