Correction de quelques exercices de probabilité

Ex 1. Un joueur lance 12 fois une pièce équilibrée.
$U=\{(x_1;x_2;...;x_{12}) \mid x_i = P \text{ ou } F\}$ $\quad |U| = 2^{12}$, itération loi de Bernoulli → Binomiale

- Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 3 fois « face » ? $\binom{12}{3}\frac{1}{2^{12}}$

- Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins 3 fois « face » ? $1-\frac{1}{2^{12}}\left[\binom{12}{0}+\binom{12}{1}+\binom{12}{2}\right]$

- Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement 6 fois « pile» ? $\binom{12}{6}\frac{1}{2^{12}}$

Ex 2. Un joueur lance 3 fois une pièce équilibrée. Il gagne 1 franc par "pile" obtenu et perd 12 francs pour le tirage de 3 "face". Le jeu est-il équilibré ?
Posons X := la variable aléatoire qui associe à une issue comme (P,P,F) *le nombre* de P (c.a.d. 2)
Posons Y := la variable aléatoire qui associe à une issue, *le gain* en fonction de l'issue.
D'où la (les) *loi*(s) *de probabilité* (ou *distribution(s)*) est (sont) donné(s) par :

x_i	0	1	2	3
y_i	-12	+1	+2	+3
p_i	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

$E(Y)=\sum_{i=1}^{3} p_i y_i = \frac{1}{2^3}(-12+3+6+3)=0$ donc le jeu est équilibré !

Concernant l'espérance de X on obtient : $E(X)=\frac{3}{2}=\mu_X$ et pour la *variance* V(X) :

$V(X)=\sum_{i=1}^{3} p_i(x_i-\mu_X)^2 = \frac{1}{2^3}\left(0-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2^3}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2^3}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2^3}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{141}{128}$ et donc

l'écart type, $\sigma=\sqrt{141/128}\cong 1{,}024477$.

Ex 3. Dans une urne se trouvent 5 boules rouges et 3 boules bleues.
On en tire deux simultanément au hasard.
Quelle est la probabilité qu'elles soient de couleurs différentes ?

Correction 1. Faire un arbre. D'où $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{7}=2\cdot\frac{3\cdot 5}{7\cdot 8}$

Correction 2. $\{R_1,R_2,R_3,R_4,R_5,B_1,B_2,B_3\}$ le nombre de sous-ensembles de 2 boules est de $\binom{8}{2}=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}$. Le nombre sous-ens. de 2 boules de même couleur est $\binom{5}{2}+\binom{3}{2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}+\frac{3\cdot 2}{1\cdot 2}=\frac{5\cdot 4+3\cdot 2}{1\cdot 2}$ et donc la proba. est : $1-\frac{5\cdot 4+3\cdot 2}{1\cdot 2}\div\frac{1\cdot 2}{8\cdot 7}$.

D'où l'*identité remarquable* (à vérifier) avec *m* et *n* boules rouges et vertes :

$$2\cdot\frac{m\cdot n}{(m+n)(m+n-1)}=1-\frac{m(m-1)+n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} .$$

Ex 4. Dans une urne se trouvent 5 boules rouges, 7 boules bleues et 11 vertes
On tire deux boules avec remise à chaque tirage. Quelle est la probabilité qu'elles soient de deux couleurs distinctes ?

$$\frac{2}{23^2}\cdot(5\cdot 7+5\cdot 11+7\cdot 11)$$

Ex 5. Combien de fois, faut-il lancer un dé (équilibré à six faces) pour être 99 % sûr que le « 6 » apparaisse au moins une fois ?

Correction 1. La prob que « 6 » apparaisse dès le 1^{er} lancer est de 1/6.
La prob. que « 6 » apparaisse exactement au n-ième lancer est de $(5/6)^{n-1}$ (1/6).
On est amené à résoudre $1/6 + (5/6)(1/6) + \ldots + (5/6)^{n-1}(1/6) \geq 0{,}99$. Or, l'expression de droite est une série géométrique de raison 5/6 et selon (Thème 4) :

$$\frac{1}{6}\left(1+\frac{5}{6}+..\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)=\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}{1-\frac{5}{6}}=\frac{6}{6}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\right)\geq 0{,}99 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{n}\leq .01 \quad\Leftrightarrow\quad n>\frac{\ln(0.01)}{\ln(5/6)}\simeq 25{,}3$$

Correction 2. Considère le complémentaire et donc résoudre : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n}\geq 0{,}99$ directement.

Ex 6. On lance une pièce de monnaie équilibrée 20 fois de suite.
Quelle est la probabilité d'obtenir « pile » entre 10 et 12 fois (extrémités comprises) ?

$$\left[\binom{20}{10}+\binom{20}{11}+\binom{20}{12}\right]\cdot\frac{1}{2^{20}}=\frac{239343}{524288}\cong 46\%$$

Ex 7. On lance deux dès tétraédriques équilibrés, numérotés chacun de 1 à 4.
Quelle est la probabilité que la somme des résultats apparents soit un nombre premier ?
X var. aléa. dont la valeur est la somme des deux dés.

x	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8
p	$\frac{1}{4^2}$	$\frac{2}{4^2}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{4}{4^2}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{2}{4^2}$	$\frac{1}{4^2}$

D'où, la prob. que la somme soit un nombre premier est $\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{4}{4^2}+\frac{2}{4^2}=\frac{9}{16}$

Commentaire. La *moyenne* et *l'écart type* de X est $\mu=5$ et $\sigma\cong 1.5811$ (avec TI-30XS).

Ex 8. Une urne contient 3 boules rouges et 5 boules bleues.
On tire 2 boules successivement (sans remise).
a) Quelle est la probabilité d'obtenir une de chaque couleur ?
b) Si les deux boules obtenues sont de la même couleur, qu'elle est la probabilité qu'au 3^e tirage l'on obtienne à nouveau la même couleur ?

a) $2\cdot\frac{3\cdot 5}{8\cdot 7}$

b) Si **RR** déjà alors il reste 1 **R** est donc la prob. est de 1/6.
Si **BB** déjà alors il reste 3 **B** est donc la prob. est de 3/6. D'où la prob. tot. = 2/3

Ex 9*. Soit une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir « face » est 1/5. On la lance jusqu'à ce que « face » apparaisse.
a) Donner la loi de probabilité de la v.a. X « nombre de jets » nécessaires jusqu'à ce que « face » apparaisse.
b) Quelle est la probabilité que ce nombre soit pair.

a) $U=\{F,PF,PPF,PPPF,PPPPF,..\}\approx\mathbb{N}^*$ apparition au n-ième lancer.

x_i	1	2	3 ...	n
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2k-1} = \frac{4}{25}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{2k} = \frac{4}{25}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^{k} == \frac{4}{25}\frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{4}{9}$.

Ex 10. On lance deux dés équilibrés et l'on gagne le produit des nombres affichés (en CH) s'ils sont identiques, sinon on perd 3.- CHF. Ce jeu est-il équitable ?

X représente le « gain »

x_i	1	4	9	16	25	36	-3
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{30}{36}$

D'où, $\mu = \frac{1}{36}$ et $\sigma \cong 8{,}4$ (résultats confirmés par la TI30XS !)

Ex 11.** On lance un dé équilibré 120 fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la face «1» entre et 19 et 23 fois (extrémités comprises) ?

Approximation de la loi *binomiale*, $B(120\ ,\ 1/6)$ de $\mu = 20$ et de $\sigma^2 = npq = 120\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{\sqrt{6}}$ par la loi *normale* $N(20,\frac{10}{\sqrt{6}})$. D'où :

$$P(19 \le X \le 23) = \Phi\left(\frac{23{,}5-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{18{,}5-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(0.857) - \Phi(-0.9) = 0.804 - (1-0.816) \cong 62\%$$

Ex 12. Une urne contient 1 boule rouge et 9 boules noires. On tire une boule de l'urne. Si elle est rouge, l'épreuve est terminée. Sinon on remet la boule tirée dans l'urne et on recommence l'épreuve jusqu'à ce que la boule rouge sorte. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirages nécessaires à l'apparition de la boule rouge.

a) Quelle est la loi de probabilité de cette variable aléatoire ?

b) Calculer la moyenne de cette variable aléatoire.

a) Géométrique avec p = 1/10 et q = 9/10. En effet, U={R, NR, NNR, NNNR,...}

b)

x_i	1	2	3 ...	n
p_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{1}{10}$	$\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{10}$

$E(X) = \frac{1}{10}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{i}(i+1)$. Posons $f(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^{i} t^{i+1} = t\cdot\frac{1}{1-\frac{9t}{10}} = \frac{10t}{10-9t}$

D'où $f'(t) = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\left(\frac{9}{10}\right)^{i} t^{i} = \frac{10(10-9t)+90t}{(10-9t)^2} = \frac{100}{(10-t)^2}$ et donc $E(X) = \frac{1}{10}f'(1) = \frac{10}{9}$.

Ex 13. Quel est l'événement le plus probable :

- sur 6 lancers de dé obtenir au moins 3 six ou
- sur 10 lancers d'une pièce de monnaie obtenir au moins 8 faces ?

cas 1 : $\binom{6}{3}\cdot\frac{1}{6^3}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{6}{4}\cdot\frac{1}{6^4}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{6}{5}\cdot\frac{1}{6^5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \frac{1}{6^6} = \frac{1453}{23328} \cong 6{,}22\%$

cas 2 : $\binom{10}{8}\cdot\frac{1}{2^{10}} + \binom{10}{9}\cdot\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} = \frac{7}{128} \cong 5{,}47\%$

Ex 14. On considère 10'000 chiffres pris au hasard. Calculer la probabilité que le chiffre « 7 » apparaisse entre 1001 et 1111 fois (extrémités comprises).

Approximation de la loi *binomiale*, B(10000,1/10) dont $\mu = 1000$ et $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{900} = 30$ par loi *normale* *N*(1000,30). D'où :

$$P(1001 \le X \le 1111) = \Phi\left(\frac{1111{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1000{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \cong 49{,}33\ \%$$

Ex 15. On vous propose le jeu suivant: on lance 20 fois une pièce de monnaie équilibrée.
Si pile sort 9, 10 ou 11 fois vous avez gagné.
Ce jeu est-il honnête ?

$$\frac{1}{2^{20}}\left[\binom{20}{9} + \binom{20}{10} + \binom{20}{11}\right] = \frac{130169}{262144} \cong 49\%$$. Presque !

Ex 16. Lors d'une fête entre 30 personnes, Elody, l'invitée australienne surprise qui ne connaît personne, fait le pari qu'il y a au moins deux personnes présentes à la fête qui sont nées le même jour de l'année. Quelles sont ses chances de gagner ?

$$1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot 336}{365^{30}} \cong 70{,}63\%$$

Ex 17*. Une urne contient 8 boules rouges et 2 boules vertes. Une *expérience* consiste à tirer 5 boules de l'urne avec remise à chaque tirage et noter le résultat R ou V.
Quelle est probabilité que « RRRVV » apparaisse au moins une fois après 33 expériences ?

Pour 1 expérience on a : $P("RRRVV") = \frac{8^3 \cdot 2^2}{10^5} =: p$ d'où $P("\overline{RRRVV}") = 1 - \frac{8^3 \cdot 2^2}{10^5} =: q$

et donc pour 33 tentatives: $1 - q^{33} \cong 49{,}5\%$.

Ex 18. Poutine propose le jeu suivant à Trump : « *Je lance deux dès équilibrés. Si le résultat est un 'double' alors je te donne le double du carré du nombre en dollars. Si les nombres sont distincts et de parités différentes, alors tu me donnes la somme des deux nombres. Et s'ils sont de parité identique, tu me donnes la moyenne des deux nombres*. » Trump devrait-il accepter de jouer ?

Posons X = « gain obtenu par Trump »

x_i	-11	-9	-7	-5	-4	-3	-2	+2	+8	+18	+32	+50	+72
p_i	2/36	4/36	6/36	6/36	4/36	6/36	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

E(x) = ((2+8+18+32+50+72) – 4 – 18 – 16 – 30 – 42 – 36 – 22) ÷ 36 = 7/18 > 0
et donc OUI !

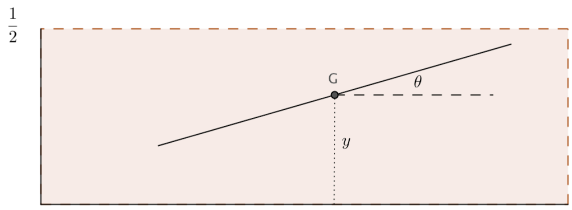
Alors que Trump accepte de jouer, Poutine dégaine une paire de dés numérotés de 0 à 5.
Et dans ce cas, doit-il toujours maintenir sa décision ?

x_i	-1	-2	-3	-4	-5	-7	-9	0	+2	+8	+18	+32	+50
p_i	4/36	4/36	8/36	2/36	6/36	4/36	2/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

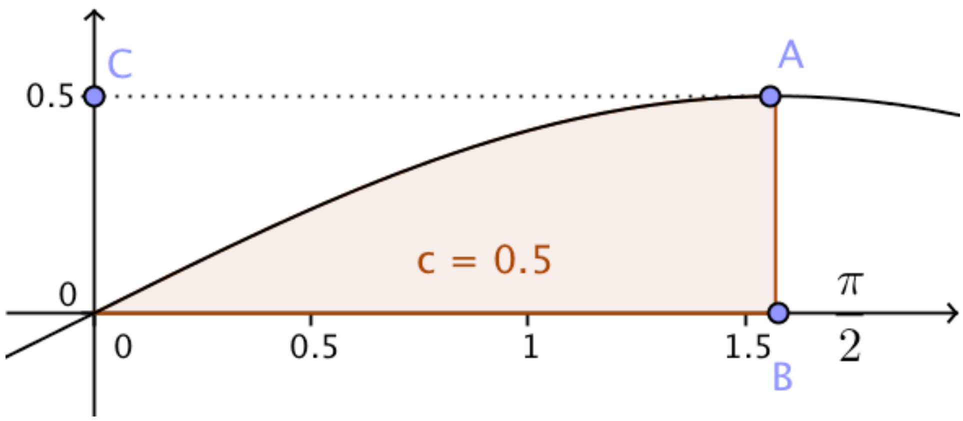
E(x) = ((2 + 8 + 18 + 32 + 50) – 4 – 8 – 24 – 8 – 30 – 28 – 18) ÷ 36 = -5/18 < 0
et donc NON !

Ex 19. Georges-Louis joue sur un parquet composé de planches parallèles de même largeur u. Il lâche un aiguille de longueur exactement u. Puis il se demande :
« Quelle est la probabilité que mon aiguille croise une rainure horizontale du parquet ? »

La position x du centre de gravité de l'aiguille (comprise entre 0 et 1) et l'angle de l'aiguille (par rapport aux rainures) angle θ (entre 0 et π) permet de déterminer les valeurs (y, θ) pour lesquelles l'aiguille croise les rainures. Par symétrie, il suffit de s'intéresser aux valeurs de y comprises entre 0 et ½ et de θ comprises entre 0 et π/2.
Considérons donc le rectangle constitué des valeurs (θ , y) avec $0 \leq y \leq ½$ et $0 \leq \theta \leq \pi/2$. On colorie en « vert» les points pour les quelles l'aiguille croise la rainure et en « bleu » sinon. L'ensemble des points frontière se situe sur la courbe $\frac{1}{2}\sin(\theta) = y$.



D'où, le rapport de l'aire sous la courbe par rapport à l'aire du rectangle correspond à la probabilité de ne pas toucher la rainure : $\dfrac{\text{Aire hachurée}}{\text{Aire rectangle}} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{-\cos(x)\big|_0^{\pi/2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}$.



Ex 20*. Un *dé icosaédrique* est un solide constitué de 20 faces équilatérales isométriques
Dix de ses faces portent le chiffre « 1 », quatre le chiffre « 2 » et les autres faces portent les chiffres « 3 », « 4 » et « 5 » chacun deux fois. On dira qu'on a *lancé le chiffre n* lorsque l'icosaèdre repose sur la face n. On suppose que le dé est non pipé.
On lance **une** fois le dé.
1) Déterminer la probabilité de lancer le chiffre n pour n = 1, 2, 3, 4 et 5.
2) On lance le dé 10000 fois. Quelle est la probabilité que le 2 apparaisse entre 1950 et 2050 fois ?
A présent on lance **deux** fois le dé. Y est la somme des points obtenus lors des deux lancers.
3) Donner la loi de répartition de cette variable Y, puis déterminer son espérance et son écart-type.

1)

x_i	1	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

2) X est une B(10000, 1/5) et donc $\mu_X = 2000$ et $\sigma^2 = npq = 1600 = 40^2$.
On approche X par la normale N(2000,40). D'où

$$P(1950 \leq X \leq 2005) = \Phi\left(\frac{2050{,}5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1949{,}5 - \mu}{\sigma}\right) \cong 79{,}32\ \%$$

3)

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	25/100	20/100	14/100	14/100	15/100	6/100	3/100	2/100	1/100

E(Y) = 4.2
V(Y) = E(Y^2) – (E(Y))^2 = 21.42 – 4.2^2 = 3.78 D'où $\sigma \approx 1.944$