Étude directe de la loi de Poisson

Approximation 'à la Euler' de la fonction exponentielle exp(x) = e^x .

Calculons $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour n infiniment grand *à la Euler* :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{n^3}+\ldots = 1+x+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$

$$= 1+x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} := e^x$$

De manière similaire on obtient : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-x+\frac{1}{1\cdot 2}x^2-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \pm \ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!} := e^{-x}$

Approximation 'à la Euler' d'une loi binomiale, $B(n,p)$ par une loi de Poisson.

La probabilité de k succès lors de n essais tous d'équiprobabilité p est $P(X=k)=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}$.

Supposons n très très grand et $0 \leq p < 1$. Rappelons que l'*espérance* de X et que l'*écart-type* de X est donnée par $\sigma^2 = npq$

Commençons par estimer $P(X=0)=(1-p)^n=\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n \cong e^{-\mu}$ par le rappel ci-dessus.

Pour n très grand on a : $\dfrac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\dfrac{n-k}{k+1}\cdot\dfrac{p}{q}=\dfrac{\mu}{k+1}\cdot\dfrac{1-\frac{k}{n}}{1-\frac{\mu}{n}}\cong\dfrac{\mu}{k+1}$

D'où, en partant de $P(X=k)\cong\frac{\mu}{k}P(X=k-1)$ et en utilisant la récurrence (ou le produit télescopique) on obtient :

$$P(X=k)\cong\frac{\mu}{k}\cdot\frac{\mu}{(k-1)}\cdot\ldots\frac{\mu}{1}\cdot P(X=0)=\frac{\mu^k}{k!}\cdot e^{-\mu}$$

Théorème. Une loi binomiale $B(n, p)$ peut être approchée par une distribution de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, de la forme $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$ de paramètre $\lambda = np$ si n est très grand .

Exercice. Démontrer pour la loi ci-dessus que

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$ **2)** $E(X)=\lambda$ **3)** $\sigma^2 = V(X)=\lambda$

Pour $P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}$

Exercice. Démontrer pour la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ ci-dessus que

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$ **2)** $E(X)=\lambda$ **3)** $\sigma^2=V(X)=\lambda$

Preuve.

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\mu^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$

2) $E(X)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot k \overset{k=0}{=} 0+\lambda e^{-\lambda}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$

3) Utilisons König pour calculer la variance :

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot k^2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda}\cdot k^2=0+\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}k$$

$$\overset{k-1=j}{=} \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}(1+j) \overset{distrib.}{=} \lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}+\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\cdot\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}=\lambda+\lambda^2$$

D'où, $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$.

MERCI à la 4MA2_df06 de 2017-2018 pour la simplification de preuve (qui est devenue « easy » à présent) !!!