Étude directe de la loi géométrique

Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont le résultat est soit « réussi » (avec une probabilité p), soit « loupé » (avec une probabilité donc de $1-p$, que nous poserons $= q$ pour simplifier l'écriture). Supposons que l'on exécute k fois l'épreuve précédente et que les $k-1^{\text{e}}$ essais soient loupés et le k^{e} réussi. On a alors : $P(X=k)=q^{k-1}p$ où X est la variable aléatoire qui indique au combientième essai k à lieu la première réussite.

Théorème. 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X=k)=1$ **2)** $\mu=\dfrac{1}{p}$ **3)** $\sigma^2=V(X)=\dfrac{q}{p^2}$

Preuve.

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(X=k)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k-1}p=p\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{k} = p\sum\limits_{j=0}^{\infty} q^{j}=p\left(\dfrac{1}{1-q}\right)=p\cdot\dfrac{1}{p}=1$

par la série géométrique.

2) $\mu_X=E(X)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}\cdot p=p\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot q^{k-1}=\dfrac{p}{q}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\cdot q^{k}$.

Si on pose $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k\cdot t^k=\dfrac{1}{1-qt}$ alors $f'(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot q^k\cdot t^{k-1}\overset{(***)}{=}\dfrac{q}{(1-qt)^2}$.

D'où, $\mu_X=\dfrac{p}{q}\cdot f'(1)=\dfrac{p}{q}\cdot\dfrac{q}{(1-qt)^2}\Big|_{t=1}=\dfrac{1}{p}$.

3) Par König, $V(X)=\mu_{X^2}-\mu_X^2=\mu_{X^2}-\dfrac{1}{p^2}$ Calculons donc $\mu_{X^2}=p\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}$.

Dans le but d'exploiter l'identité (***) ci-dessus, posons donc :

$g(t):=\sum\limits_{k=0}^{\infty} k\cdot q^{k-1}\cdot t^k=\dfrac{t}{q}\cdot\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\cdot q^k\cdot t^{k-1}\overset{(***)}{=}\dfrac{t}{q}\cdot\dfrac{q}{(1-qt)^2}=\dfrac{t}{(1-qt)^2}$, dont la dérivée (en t) est

$g'(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^2q^{k-1}t^{k-1}=\dfrac{(1-qt)^2+2qt^2(1-qt)}{(1-qt)^4}=\dfrac{1-qt+2qt^2}{(1-qt)^3}$. D'où $\mu_{X^2}=p\cdot g'(1)=\dfrac{1+q}{p^2}$

et donc

$$V(X)=\mu_{X^2}-\mu_X^2=\frac{1+q}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{q}{p^2}.$$

Remarque. Comme toutes les sommes ci-dessus convergent *uniformément* sur $\left[-1;+1\right]$ alors la dérivée d'une somme infinie (!) égale la somme des dérivées (ainsi que pour les primitives) par des théorèmes classiques d'analyse à découvrir l'année prochaine peut-être !