EXPLORATION DES EXERCICES DU 30 SEPTEMBRE

Recherche. À l'aide des six plus petits nombres premiers impairs 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 (et des quatre opérations $+$, $-$, $\cdot$, $\div$) fabriquer 4096.

Remarque. Le choix de 4096 n'est pas un hasard puisque sa décomposition en facteurs premiers n'est autre que $4096 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{12}$ Au lieu de chercher directement la réponse, essayons de fabriquer de toute les manières possibles, toutes les puissances de 2 de 1 à 12, en exploitant le minimum d'éléments de construction à chaque fois.

Exploration.

(1) Pour $2^1 = 2$ on a : $2 = 5 - 3 = 7 - 5 = 13 - 11$.
(2) Pour $2^2 = 4$ on a : $4 = 7 - 3 = 17 - 13$.
(3) Pour $2^3 = 8$ on a : $8 = 3 + 5 = 11 - 3 = 13 - 5$.
(4) Pour $2^4 = 16$ on a : $16 = 3 + 13 = 5 + 11$.
(5) Pour $2^5 = 32$ on a : $32 = 5 \cdot 7 - 3 = 3 \cdot 7 + 11 = 3 \cdot 13 - 7$.
(6) Pour $2^6 = 64$ on a : $64 = 3 \cdot 17 + 13 = 7 \cdot 11 - 13$.
(7) Pour $2^7 = 128$ on a : $128 = 11 \cdot 13 - 3 \cdot 5 = 7 \cdot 11 + 3 \cdot 17$.
(8) Pour $2^8 = 256$ on a : $256 = 13 \cdot 17 + 5 \cdot 7 = 7 \cdot 13 \cdot 3 - 17 = (3 + 13) \cdot (5 + 11)$.

Construction de nouvelles solutions à partir des résultats ci-dessus. En observant attentivement les solutions ci-dessous il est possible alors d'en construire de nouvelles. La seule contrainte à remplir est de choisir des solutions n'ayant pas d'élément en commun, puisque le produit de deux puissances de deux est encore une puissance de deux.

$$\text{Pour } 2^9 = 2^6 \cdot 2^3 = (7 \cdot 11 - 13) \cdot (13 - 5) = 512$$

$$\text{Pour } 2^{10} = 2^7 \cdot 2^3 = (7 \cdot 11 + 3 \cdot 17) \cdot (13 - 5) = 1024$$

$$\text{Pour } 2^{11} = 2^3 \cdot 2^8 = (11 - 3) \cdot (13 \cdot 17 + 5 \cdot 7) = 2048$$

Et enfin

$$\text{Pour } 2^{12} = 2^4 \cdot 2^8 = (5 + 11) \cdot (7 \cdot 13 \cdot 3 - 17) = 4096$$

Concernant le compte est MAX avec 1,8 ; 0,8 ; 0,75 ; 1,2.

Réponse. Posons : A=1,8 ; B=0,8 ; C=0,75 et D=1,2. On observe rapidement que B et C sont très proches, donc leur différence permet de fabriquer un nombre minuscule. Par ailleurs, comme A et D sont supérieurs à 0, mais inférieurs à 2 alors leur somme est supérieur à leur produit. [1]
D'où la réponse est

$$(A + D) \div (B - C) = (1,8 + 1,2) \div (0,8 - 0,75) = 3 \div 0,05 = 300 \div 5 = 60.$$

1. Si $0 \leq a < b \leq 2$ alors $a + b > a \cdot b \iff 0 < a + (1 - a) \cdot b$.

Christian Aebi, CO de la Gradelle, Collège Calvin, Genève, Suisse